面试中几种常见的斐波那契数列模型

斐波那契数列又译费波拿契数、斐波那契数列、费氏数列、黄金分割数列。
根据高德纳（Donald Ervin Knuth）的《计算机程序设计艺术》（The Art of Computer Programming），1150年印度数学家Gopala和金月在研究箱子包装物件长阔刚好为 1 和 2 的可行方法数目时，首先描述这个数列。 在西方，最先研究这个数列的人是比萨的列奥那多（又名费波那西），他描述兔子生长的数目时用上了这数列。

1. 第一个月初有一对刚诞生的兔子
2. 第二个月之后(第三个月初)它们可以生育
3. 每月每对可生育的兔子会诞生下一对新兔子
4. 兔子永不死去

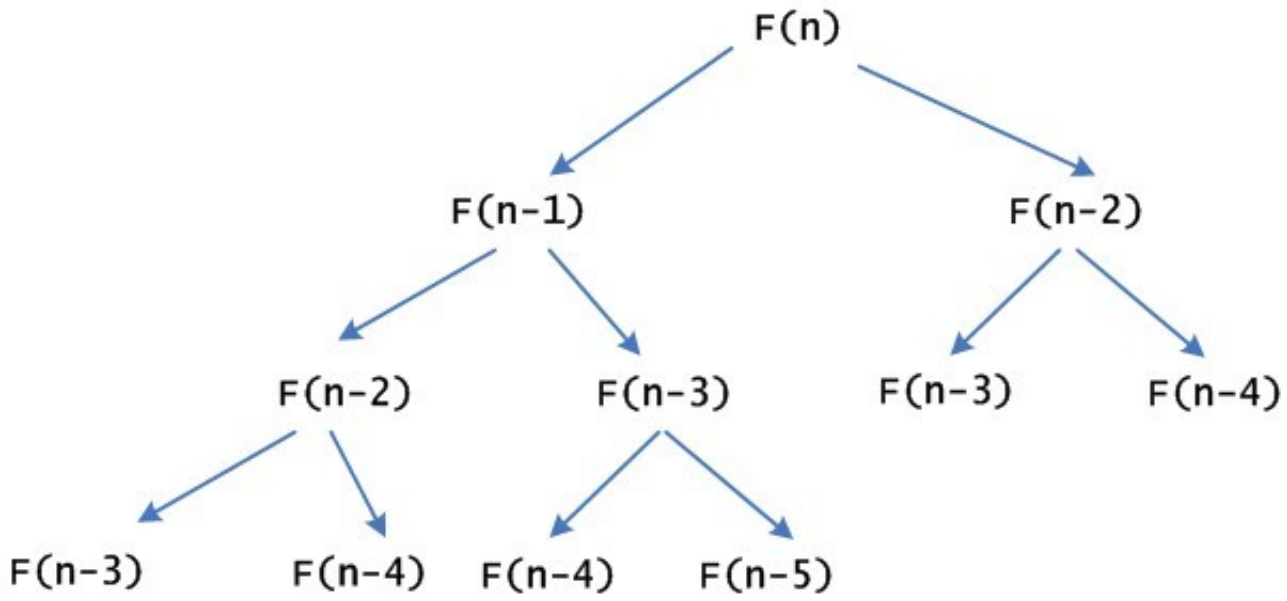
假设在 n 月有可生育的兔子总共 a 对，n+1 月就总共有 b 对。在 n+2 月必定总共有 a+b 对：因为在 n+2 月的时候，前一月(n+1月)的 b 对兔子可以存留至第n+2月（在当月属于新诞生的兔子尚不能生育）。而新生育出的兔子对数等于所有在 n 月就已存在的 a 对

用数学公式表示就是：
$a_1=1;$
$a_2=1;$
$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ 其中n>2
这个等式就是大学刚刚学递归的时候学习的，因为这个很容易用递归的代码实现，很简单：

```
// Author: 过往记忆
// Email: wyphao.2007@163.com
// Blog：www.iteblog.com
// 仅用于学习，转载请注明出处

long Fibonacci(int n){
 if (n==0) return 1;
 if (n==1) return 1;
 if (n>1) return Fibonacci(n-1) + Fibonacci(n-2);
}
```

代码简单，明了。但是仔细分析会发现，在算Fibonacci(n)的时候，需要用到Fibonacci(n-1)和Fibonacci(n-2),但是Fibonacci(n-1)的计算依赖于Fibonacci(n-2)和Fibonacci(n-3)，这样需要一直计算下去，会有很多重复的计算，因为递归没有保存下中间的计算过程。如下图所示：



这种时间复杂度很高差不多是5n^2/3。
既然在递归的过程中没有保存下中间的计算过程，我们可以声明一个数组用于保存中间的计算过程，在每一次递归之前，先判断数组里面是否有Fibonacci(n)的值；如果有，那就直接取出返回；如果没有。则递归计算一次，然后把计算出来的Fibonacci(n)值保存在数组中，以便于下次使用。算法如下所示：

```
#include <stdio.h>

// Author: 过往记忆
// Email: wyphao.2007@163.com
// Blog：www.iteblog.com
// 仅用于学习，转载请注明出处

long long temp[100] = {0};

long long Fibonacci(int n){
 if(n == 1){
  return 1;
 }
 if(n == 2){
  return 1;
 }
 if(temp[n] != 0){
  return temp[n];
 }else{
  long long sum = Fibonacci(n - 1) + Fibonacci(n - 2);
  temp[n] = sum;
  return sum;
 }
}
```

```
int main(){
 printf("%d₩n", Fibonacci(21));
 return 0;
}
```

上面的方法也是利用递归实现的，但是在计算的过程中，保存下中间的计算过程，所以计算速度明显比上面的块多了。
但是递归终究是递归，它的效率终究是比较低的，那么，我们可以用非递归的方法来解决递归效率慢的问题，可以同样用数字保存中间的计算过程，如下所示：

```
// Author: 过往记忆
// Email: wyphao.2007@163.com
// Blog：www.iteblog.com
// 仅用于学习，转载请注明出处

int Fibonacci2(int n){
 if(n < 1){
  return -1;
 }

 if(n < 3){
  return 1;
       }
 int *a =new int[n];
 *a=*(a+1)=1;
  for(int i=2;i<n;i++){
  a[i]=a[i-1]+a[i-2];
  }
 int temp = a[n-1];
 delete a;//释放内存（一个new对应一个delete）
 return temp;
}
```

这种方法速度很快，但是在计算过程中用了很多的空间(int *a =new int[n];)，能不能不申请这么多的空间呢？答案是可以的，因为每一次计算值用到了前两个值，所以，我们可以值申请两个临时变量用以保存前面的两个值，代码实现如下:

```
#include <iostream>

using namespace std;
```

```
// Author: 过往记忆
// Email: wyphao.2007@163.com
// Blog：www.iteblog.com
// 仅用于学习，转载请注明出处

unsigned long long Fibonacci(int n){
 unsigned long long first = 0, second = 1;
 unsigned long long tempSum = 0;
 int i =0;

 if(n == 0){
  return 0;
 }else if(n == 1){
  return 1;
 }

 for(i = 2; i <= n; i++){
  tempSum = first + second;
  first = second;
  second = tempSum;
 }

 return tempSum;
}

int main(){
 int n;
 while(cin >> n){
  cout << Fibonacci(n) << endl;
 }

 return 0;
}
```

这种方法非常的高效。在实际的面试中，面试官很少直接问你斐波那契数列，而是直接问题一些别的东西，比如：

青蛙跳台阶问题
一只青蛙一次可以跳上1级台阶，也可以跳上2级。求该青蛙跳上一个n级的台阶总共有多少种跳法

分析：首先我们考虑最简单的情况。如果只有1级台阶，那显然只有一种跳法。如果有2级台阶，

那就有两种跳的方法了：一种是分两次跳，每次跳1级；另外一种就是一次跳2级。 现在我们再来讨论一般情况。我们把n级台阶时的跳法看成是n的函数，记为f(n)。当n>2时，第一次跳的时候就有两种不同的选择：一是第一次只跳1级，此时跳法数目等于后面剩下的n-1级台阶的跳法数目，即为f(n-1)；另外一种选择是第一次跳2级，此时跳法数目等于后面剩下的n-2级台阶的跳法数目，即为f(n-2)。因此n级台阶时的不同跳法的总数f(n)=f(n-1)+(f-2)。

我们把上面的分析用一个公式总结如下：

f(1) = 1 n=1
f(2) = 2 n=2
f(n) = f(n-1)+(f-2) n>2
所以这是一个很典型的斐波那契数列。直接用上面的方法就可以实现。
还有一些例子，比如：

变态跳台阶
一只青蛙一次可以跳上1级台阶，也可以跳上2级.....它也可以跳上n级。求该青蛙跳上一个n级的台阶总共有多少种跳法。

其实也是一个变形的斐波那契数列。分析：
分析：用Fib(n)表示青蛙跳上n阶台阶的跳法数，青蛙一次性跳上n阶台阶的跳法数1(n阶跳)，设定Fib(0) = 1；

1. 当n = 1 时， 只有一种跳法，即1阶跳：Fib(1) = 1;
2. 当n = 2 时， 有两种跳的方式，一阶跳和二阶跳：Fib(2) = Fib(1) + Fib(0) = 2;
3. 当n = 3 时，有三种跳的方式，第一次跳出一阶后，后面还有Fib(3-1)中跳法； 第一次跳出二阶后，后面还有Fib(3-2)中跳法；第一次跳出三阶后，后面还有Fib(3-3)中跳法Fib(3) = Fib(2) + Fib(1)+Fib(0)=4;
4. 当n = n 时，共有n种跳的方式，第一次跳出一阶后，后面还有Fib(n-1)中跳法；
   第一次跳出二阶后，后面还有Fib(n-2)中跳法。第一次跳出n阶后，后面还有 Fib(n-n)中跳法.
   Fib(n) = Fib(n-1)+Fib(n-2)+Fib(n-3)+...+Fib(n-n)=Fib(0)+Fib(1)+Fib(2)+...+Fib(n-1)
   又因为Fib(n-1)=Fib(0)+Fib(1)+Fib(2)+...+Fib(n-2)
   两式相减得：Fib(n)-Fib(n-1)=Fib(n-1) =====》 Fib(n) = 2*Fib(n-1) n >= 2

所以可以得到的递推公式为：
fib(1) = 1 n=1
fib(2) = 2 n=2
fib(n) = 2*Fib(n-1) n >= 2
实现

```
#include <iostream>

using namespace std;

// Author: 过往记忆
// Email: wyphao.2007@163.com
```

```
// Blog：www.iteblog.com
// 仅用于学习，转载请注明出处

int main()
{
 long long f[51]={0,1,2},n = 3,sum = 3;
 for(int i = 3;i <= 50 ;i++) {
  f[i] = sum + 1;
  sum += f[i];
 }
 while(cin >> n){
        cout << f[n] << endl;
    }
 return 0;
}
```

当然还有很多的斐波那契数列变形，其实善于分析，就可以很好的解决这类的问题。